Лекция №2.
Основные факты геометрии Лобачевского

Все предложения абсолютной геометрии справедливы в геометрии Лобачевского.

Плоскость, в которой выполняются все аксиомы абсолютной геометрии и аксиома параллельности Лобачевского, называется гиперболической плоскостью или плоскостью Лобачевского.

Пусть в данной гиперболической плоскости б точка С лежит вне данной прямой АВ. По аксиоме параллельности Лобачевского в плоскости б через точку С можно провести по крайней мере две прямые, которые не пересекают прямую АВ. Обозначим эти прямые СК и СР (рис.1). Если прямые СК и СР не пересекают прямую АВ, то любая прямая СМ, проходящая между прямыми СК и СР в вертикальных углах К'СР и КС Р', также не пересекает прямую АВ, т.е. на основании аксиомы параллельности Лобачевского через точку С в плоскости АВС проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую АВ.

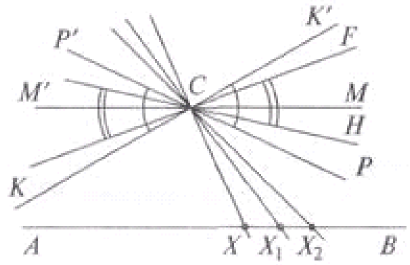


Рис. 1

С другой стороны, если X -- любая точка прямой АВ, то прямая СX пересекает прямую АВ в точке X, причем прямая СX проходит уже в вертикальных углах КСР и К'СР'. Вращая прямую СX вокруг точки С в направлении против часовой стрелки, мы будем получать прямые, пересекающие прямую АВ соответственно в точках расположенных правее точки X (см. рис.1).

Таким образом, через точку С проходит бесконечно много прямых, пересекающих прямую АВ, и бесконечно много прямых, непересекающих аВ. При этом «пересекающие» прямые лежат по одну сторону от «непересекающих», т.е. если CF и CH - «непересекающие» прямые, то ни одна прямая, лежащая между ними внутри угла FCH, не может быть «пересекающей» прямой, и наоборот.

Такое разбиение всех прямых пучка с центром С означает, что должна существовать либо последняя «пересекающая» прямую АВ, либо первая «непересекающая» эту прямую. Но, как легко убедиться, последней «пересекающей» прямую AB быть не может, значит, граничной прямой, отделяющей «пересекающие» прямую AB от «непересекающих» ее, является первая «непересекающая». Эту граничную прямую Лобачевский и называет прямой, параллельной прямой AB в точке C.

Пусть этой прямой является прямая CY (рис.2). Тогда прямая CZ, симметричная CY относительно перпендикуляра CL к данной прямой AB, также параллельна прямой AB в точке C.

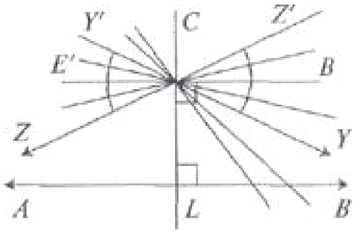


Рис. 2

Таким образом, в гиперболической плоскости картина расположения прямых, проходящих через точку C относительно прямой AB, представляется в таком виде: через точку C проходят две прямые Y'Y и Z'Z, параллельные прямой AB, расположенные симметрично относительно перпендикуляра CL к данной прямой AB; прямые, расположенные внутри вертикальных углов Y'CZ и YCZ', не пересекают прямую AB. Лобачевский называет эти прямые расходящимися с AB: все остальные прямые пучки с центром C (они пересекают AB) Лобачевский называет сходящимися в AB.

В целях наглядности на рисунках будем указывать стрелкой направление прямой и при этом говорить, что направленная прямая Y'Y параллельна направленной прямой AB, а направленная прямая Z'Z параллельна направленной прямой BA (см.рис.2).

Заметим, что прямая EE', проходящая через точку C перпендикулярно прямой CL (CLAB), принадлежит к числу прямых, расходящихся с AB, т.е. в гиперболической плоскости две прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся. (В евклидовой плоскости две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.)

Параллельные прямые как в евклидовой, так и в гиперболической плоскости обладают следующими свойствами: если AB || CD, то CD || AB; если AB || CD, CD || KP, то AB || KP.

Николай Иванович Лобачевский ввел следующее понятие угла параллельности.

Пусть AK и AP - прямые, параллельные прямой BC в точке A, AD - перпендикуляр к BC (рис.3). (Прямые AK и AP симметричны относительно AD). В плоскости Лобачевского углом параллельности, соответствующим данной прямой BC в данной точке A, вне ее лежащей, называется острый угол KAD между перпендикуляром AD, опущенным на точки А на ВС, и прямой АК, параллельной данной прямой ВС.

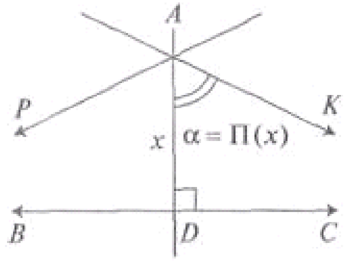


Рис. 3

Если длину перпендикуляра AD обозначить х, то где бы точка А ни была расположена относительно прямой ВС, находясь от нее на расстоянии х, величина угла параллельности не изменяется. Иначе говоря, угол параллельности в плоскости Лобачевского является инвариантом движения. Это, в свою очередь, означает, что с изменением расстояния х от точки А до прямой ВС угол параллельности меняет свою величину, т.е. угол параллельности является функцией расстояния х от точки А до прямой ВС. Эту функцию Лобачевский обозначает через П(х): б = П(х). (Евклидова геометрия характеризуется тем, что в ней угол б = П(х) всегда прямой, каков бы ни был отрезок AD.)

$\lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0, \lim_{x\to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$

Лобачевский доказывает, что 0<П(х)< . При этом функция П(х) монотонно убывает с возрастанием аргумента х: , т.е. по мере удаления точки А от прямой ВС угол б = П(х) уменьшается от 90° до 0°. Более того, каков бы ни был острый угол б, всегда существует один и только один отрезок длиной х такой, что П(х) = б. т.е. функиия П(х) обратима.

Здесь уместно заметить, что мы, вероятно, потому питаем большое доверие к евклидовой геометрии, что все доступные нам измерения происходят в таком незначительном уголке вселенной, что не представляется возможным обнаружить отличие евклидовой геометрии от наших ощущений. Поэтому не исключено, что вера в утверждение «сумма внутренних углов линейного треугольника равна 180°» была обусловлена тем, что экспериментальной проверке этого утверждения подвергались треугольники достаточно малых размеров. Лобачевский вычислил сумму углов треугольника, вершинами которого служили Земля, Солнце и звезда Сириус, и получил угловой дефект (угловой недостаток до 180°) 0'',000372. (Даже столь малое отличие суммы углов этого треугольника от 180° не поколебало убежденности Лобачевского в неевклидовости мирового пространства.)

Следствием аксиомы параллельности Лобачевского является рождение новой геометрии, которую называют геометрией Лобачевского или гиперболической геометрией. В этой геометрии имеется ряд предложений, совершенно отличающихся от соответствующих предложений геометрии Евклида.

Укажем ряд важнейших планиметрических теорем, относящихся к абсолютной геометрии.

Каждый отрезок и каждый угол можно единственным образом разделить пополам.

Через каждую точку можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.

Сумма двух смежных углов равна 2d

Все прямые углы равны между собой.

Вертикальные углы равны.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, углы при основании равны.

Перпендикуляр короче наклонной. Известные теоремы о сравнении перпендикуляров, наклонных и их проекций.

Внешний угол треугольника больше внутреннего угла, с ним несмежного.

Во всяком треугольнике не может быть более одного прямого или тупого угла.

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Три признака равенства треугольников.

Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, или внутренние накрест лежащие углы равны, или сумма внутренних односторонних углов равна 2d, то данные прямые не пересекаются.

Два перпендикуляра к третьей прямой не пересекаются.

Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, ими определяемой, проходит по крайней мере одна прямая, не пересекающая данной.

Сумма углов треугольника не более 2d(11-я теорема Лежандра).

Если в плоскости две точки лежат по разные стороны прямой, то отрезок, их соединяющий, пересекает данную прямую.

Если луч проходит через вершину треугольника внутрь его, то он пересекает противоположную сторону треугольника.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.

В треугольник можно вписать единственную окружность.

Прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.
Равные дуги окружности стягиваются равными хордами, и
Если выбрать единичный отрезок, то всякому отрезку можно поставить в соответствие единственное положительное число, называемое длиной отрезка, и, обратно, каждому положительному числу можно поставить в соответствие некоторый отрезок, длина которого выражается этим числом.
Если все внутренние лучи, выходящие из вершины угла АОВ ,а также сторона АО и ОВ разбить на два класса так, что 1) каждый луч принадлежит одному и только одному из этих классов, луч АО принадлежит первому классу, а луч ОВ - ко второму, 2) каждый луч первого класса лежит между ОА и любым лучом второго класса, то существует один и только один луч 1, пограничный между лучами обоих классов, причем сам луч 1 принадлежит либо первому, либо второму классу.
1.26. Если выбрать некоторый угол в качестве единицы измерения, то каждому углу можно поставить соответствие единственное число, называемое мерой или величиной угла.
Точки ориентированной прямой CD, параллельной прямой AB, неограниченно приближаются к AB в сторону параллельности и неограниченно от нее удаляются в противоположную сторону. Это неограниченное приближение параллели CD к AB выражают так: параллельные прямые в сторону параллельности асимптотически приближаются одна к другой (рис.4) (во-видимому, именно асимптотическое приближение прямых друг к другу было не до конца понято Саккери при исследовании им гипотезы острого угла).

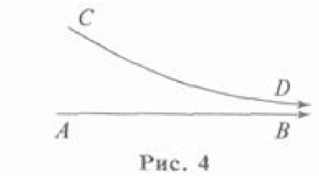


Рис. 4

Прямая в гиперболической плоскости имеет две бесконечно удаленные точки. (В евклидовой плоскости прямая дополняется только одной бесконечно удаленной точкой.)
В гиперболической плоскости существует ряд «интересных» особенностей взаимного расположения параллельных прямых (параллелей).
Договоримся, что если две параллели имеют общую бесконечно удаленную точку B, то будем записывать AB || CD. На рисунках направления параллельности будем указывать стрелками (рис.5).

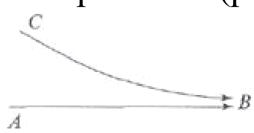
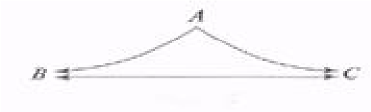


Рис. 5

Фигуру, состоящую из двух лучей АВ, АС и прямой ВС, которой они параллельны в одну и в другую сторону (рис.6) (конфигурация Лобачевского-Больяи), можно рассматривать как треугольник с одной конечной и двумя бесконечно удаленными вершинами.

Рис.6



В геометрии Лобачевского треугольник с двумя конечными и одной бесконечно удаленной вершинами иногда (рис.7) называют двуугольником.

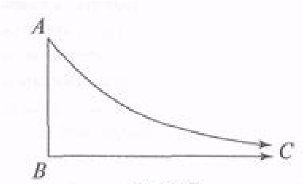


Рис. 7

Теперь возьмем между параллелями АВ и СВ любую точку М и проведем через нее прямые МА и МС, параллельные тем же прямым, обращенным в противоположные стороны, т.е. направленным прямым ВА и ВС (рис.8, а; МА || ВА, МС|| ВС). Пусть АМС = 2 б. Тогда на биссектрисе угла АМС существует такая точка Н, удаленная от точки М на расстояние х, что П(х) = б. Прямая АС, проходящая через точку Н перпендикулярно МН, параллельна каждой из прямых МА и МС, значит, параллельна ВА и ВС. Таким образом, мы получили треугольник АВС, все три стороны которого попарно параллельны (рис.8, б).

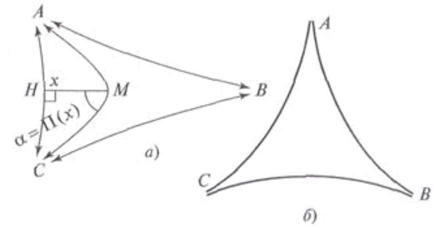


Рис. 8

В гиперболической плоскости две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они неограниченно удаляются одна от другой (рис.9). Длина этого перпендикуляра принимается за расстояние между расходящимися прямыми.

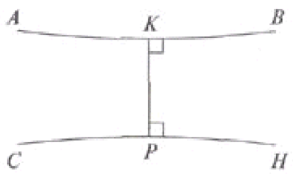


Рис. 9

Пусть АВ и СН -- две расходящиеся прямые. Из середины М их общего перпендикуляра КР проведем прямые МВ || КВ и МА || КА, МН || РН и МС ||

PC (рис.10) (такие прямые существуют согласно обратимости функции Лобачевского П(x)). Тогда для каждого из углов AMC и BMH существуют соответственно прямые AC и BH, параллельные сторонам этих углов.

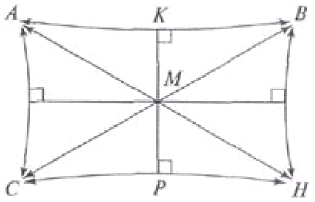


Рис.10

Конфигурация, которую мы таким образом получили, представляет собой своеобразный четырехугольник ABHC, четыре вершины которого лежат в бесконечно удаленных точках прямых, являющихся его сторонами; стороны и диагонали этого четырехугольника параллельны между собой в направлениях, указанных стрелками. (О таком четырехугольнике упоминает Швейкарт в заметке, которую он послал Гауссу.)

Далее, сумма внутренних углов треугольника в геометрии Лобачевского является переменной величиной - она меняется от треугольника к треугольнику, но всегда остается меньше 180°.

Предложение «сумма углов четырехугольника меньше 4d» вытекает из предыдущего.

Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет ни прямоугольников, ни квадратов. Вообще сумма углов n - угольника меньше 2d(n-2).

(рис. 13).

Оказалось, что в геометрии на орисфере сумма углов любого треугольника равна 180 градусов. То есть для орициклов на орисфере справедлив пятый постулат - господствует геометрия Евклида. Другими словами, из материала своей "воображаемой" геометрии Лобачевский сумел построить модель геометрии Евклида. Какая злая ирония судьбы! Если бы все было наоборот! Гениальный ученый понимал: создай он из материала евклидовой геометрии (в непротиворечивости которой никто не сомневался) модель собственной "воображаемой" геометрии - и законность его геометрической системы установлена. Это сделали математики уже следующего поколения.

Лобачевский доказал, что на предельной поверхности выполняется обычная двумерная геометрия Евклида. Не странно ли: отказ от евклидовой геометрии на двумерной плоскости в пространстве Лобачевского порождает евклидову же геометрию на другой двумерной поверхности. Носителем этой евклидовой геометрии в гиперболическом (неевклидовом) пространстве является предельная поверхность (ее называют еще орисферой).

Восстановление евклидовой планиметрии в неевклидовом пространстве имеет чрезвычайно большое значение. Используя факт существования евклидовой геометрии на предельной поверхности, Лобачевский приходит к тригонометрии прямоугольных треугольников в гиперболической плоскости, расположение которой он строит в «воображаемой геометрии», как ее называет Лобачевский, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию, развивает дифференциальное и интегральное исчисление. Он развивает созданную им геометрию до такого уровня, которого достигла до него в течение последних трех столетий классическая, «употребляемая» геометрия. И чем дальше шло это развитие новой геометрии, не наталкиваясь ни на какие противоречия, тем тверже крепла уверенность Лобачевского в ее незыблемости. Лобачевским была создана совершенно новая наука, принесшая новые идеи и факты, свидетельствующие о гениальности ее творца. Прецедента этому история развития человеческого знания не имела.

Вопросы для самоконтроля.

1.Укажите ряд важнейших планиметрических теорем, относящихся к абсолютной геометрии? ***Ответ:*** *(Каждый отрезок и каждый угол можно единственным образом разделить пополам.*

Через каждую точку можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.

Сумма двух смежных углов равна 2d

Все прямые углы равны между собой.

Вертикальные углы равны.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, углы при основании равны.

Перпендикуляр короче наклонной. Известные теоремы о сравнении перпендикуляров, наклонных и их проекций.

Внешний угол треугольника больше внутреннего угла, с ним несмежного.

Во всяком треугольнике не может быть более одного прямого или тупого угла.

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

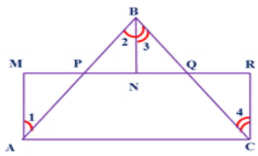
Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Три признака равенства треугольников.

Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, или внутренние накрест лежащие углы равны, или сумма внутренних односторонних углов равна 2d, то данные прямые не пересекаются.

Два перпендикуляра к третьей прямой не пересекаются.
Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, ими определяемой, проходит по крайней мере одна прямая, не пересекающая данной.
Сумма углов треугольника не более 2d(11-я теорема Лежандра).
Если в плоскости две точки лежат по разные стороны прямой, то отрезок, их соединяющий, пересекает данную прямую.
Если луч проходит через вершину треугольника внутрь его, то он пересекает противоположную сторону треугольника.
Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.
В треугольник можно вписать единственную окружность.
Прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.)

2.Сумма внутренних углов треугольника в геометрии Лобачевского является переменной величиной - она меняется от треугольника к треугольнику, но всегда остается меньше 180°. Докажите это, используя лекцию. ***Ответ:***(*Сумма углов любого треугольника меньше* $180^{0.}$



Доказательство. Через середины AB и BC проведем среднюю линию треугольника PQ.

Из каждой вершины треугольника проведем перпендикуляр на среднюю линию.

Получили пары равных треугольников по гипотенузе и острому углу: ΔAMP=ΔPBN, ΔBNQ=ΔQRC. Следовательно, ∟1=∟2, ∟3=∟4; AM=BN, BN=CR,AM=CR.

Получили четырехугольник AMRC –это четырехугольник Саккери, так как углы при основании MR равны, и AM равна CR. А в геометрии Лобачевского есть теорема о том, что сумма углов, прилежащих к четвертой стороне четырехугольника Саккери меньше 180^0*, то есть, получаем, что* ∟A+∟1+∟C+∟4<180^0.

Производя замену углов из равенств ∟1=∟2, ∟3=∟4, получаем, ∟A∟C+∟2+∟3<180^0*, но сумма второго и третьего углов есть угол B, следовательно, сумма углов треугольника меньше* 180^0.)