Лекция №3.
Аксиома параллельности Лобачевского, основные следствия.

LV_1. (Аксиома параллельности Лобачевского). В любой плоскости существует прямая a_0 и точка A_0, не принадлежащая этой прямой, такие, что через эту точку проходит по крайней мере две прямые, не пересекающие a_0.

Множество точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих аксиомам принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности и аксиоме параллельности Лобачевского будем называть трехмерным пространством Лобачевского и обозначать через $Л_3$. Большинство геометрических свойств фигур будут рассматриваться нами на плоскости пространства $Л_3$, т.е. на плоскости Лобачевского. Обратим внимание на то, что формальное логическое отрицание аксиомы V_1, аксиомы параллельности евклидовой геометрии, имеет именно ту формулировку, которую мы привели в качестве аксиомы LV_1. На плоскости существует, по крайней мере, одна точка и одна прямая, для которых не выполнено утверждение аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Докажем теорему, из которой следует, что утверждение аксиомы параллельности Лобачевского справедливо для любой точки и любой прямой плоскости Лобачевского.

Теорема 13.1. *Пусть a – произвольная прямая, A – точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a, существует по крайней мере две прямые, проходящие через A и не пересекающие прямую a.*

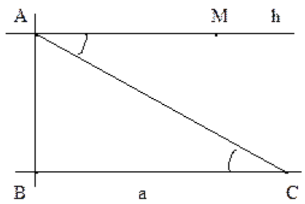

Рис. 50

Доказательство. Доказательство проведем методом «от противного», при этом воспользуемся теоремой 11.1 Пусть в пространстве Лобачевского существует такая точка A и прямая a, что в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, через точку A проходит единственная прямая, не пересекающая a. Опустим и точки A перпендикуляр AB на прямую a и в точке A восставим перпендикуляр h к прямой AB (рис. 50). Как следует из теоремы 4.2 прямые h и a не пересекаются. Прямая h, в силу предположения, - единственная прямая, проходящая через A и не пересекающая a. Выберем на прямой a произвольную точку C. Отложим от луча AC в полуплоскости с границей AB, не содержащей точку B, угол CAM, равный ACB. Тогда, как следует из той же теоремы 4.2, прямая AM не пересекает a. Из нашего предположения следует, что она совпадает с h. Поэтому точка M принадлежит прямой h. Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle ABC = d$. Вычислим сумму углов треугольника ABC: $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = d + \angle BAC + \angle CAM = 2d$. Из теоремы 11.1 следует, что выполнено условие аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Поэтому в рассматриваемой плоскости не может существовать таких точки A_0 и прямой a_0, что через эту точку проходит по крайней мере две прямые, не пересекающие a_0. Мы пришли к противоречию с условием аксиомы параллельности Лобачевского. Теорема доказана.

Следует заметить, что в дальнейшем мы будем пользоваться утверждением именно теоремы 13.1, по сути, заменяя им утверждение аксиомы параллельности Лобачевского. Кстати, во многих учебниках именно это утверждение принято в качестве аксиомы параллельности геометрии Лобачевского.

Из теоремы 13.1 легко получить следующее следствие.

Следствие 13.2. *В плоскости Лобачевского через точку, не лежащую на данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную.*

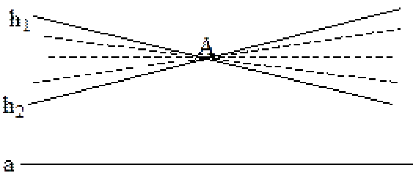

Рис. 51

Действительно, пусть a данная прямая, а A – точка, ей не принадлежащая, h_1 и h_2 – прямые, проходящие через A и не пересекающие a (рис. 51). Очевидно, что все прямые, которые проходят через точку A и лежат в одном из углов, образованных h_1 и h_2 (см. рис. 51), не пересекают прямую a.

В главе 2 мы доказали ряд утверждений, эквивалентных аксиоме параллельности евклидовой геометрии. Их логические отрицания характеризуют свойства фигур на плоскости Лобачевского.

Во первых, на плоскости Лобачевского справедливо логическое отрицание пятого постулата Евклида. В параграфе 9 нами был сформулирован сам постулат и доказана теорема о его эквивалентности аксиоме параллельности евклидовой геометрии (см. теорему 9.1). Его же логическое отрицание имеет вид:

Утверждение 13.3. *На плоскости Лобачевского существуют две непересекающиеся прямые, которые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов.*

В лекции нами было сформулировано предложение Посидония: *на плоскости существуют по крайней мере три коллинеарные точки, расположенные в одной полуплоскости от данной прямой и равноудаленные от нее.* Также мы доказали теорему 12.6: *предложение Посидония эквивалентно утверждению аксиомы параллельности евклидовой геометрии.* Таким образом, на плоскости Лобачевского действует отрицание этого утверждения.

Утверждение 13.4. *Множество точек, равноудаленных от прямой на плоскости Лобачевского и расположенных в одной полуплоскости относительно ее, в свою очередь не лежат на одной прямой.*

На плоскости Лобачевского множество точек, равноудаленных от прямой и принадлежащей одной полуплоскости относительно этой прямой, образуют кривую линию, так называемую эквидистанту. Ее свойства будут рассмотрены нами позже.

Рассмотрим теперь предложение Лежандра: п*ерпендикуляр, проведенный к стороне острого угла в любой точке этой стороны, пересекает вторую сторону угла.* Доказанная нами теорема 11.6 утверждает, что *предложение Лежандра эквивалентно аксиоме параллельности евклидовой геометрии.* Отсюда следует, на плоскости Лобачевского справедливо логическое отрицание этого предложения.

Утверждение 13.5. *На стороне любого острого угла существует такая точка, что перпендикуляр к ней, восставленный в этой точке, не пересекает вторую сторону угла.*

Отметим свойства треугольников и четырехугольников плоскости Лобачевского, которые непосредственно следуют из результатов параграфов 9 и 11. Прежде всего, теорема 11.1. утверждает, что *предположение о существовании треугольника, сумма углов которого совпадает с суммой двух прямых углов, равносильно аксиоме* *параллельности евклидовой плоскости.* Отсюда и из первой теоремы Лежандра следует следующее утверждение

Утверждение 13.6. *На плоскости Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше 2d.*

Отсюда непосредственно вытекает, что *сумма углов любого выпуклого четырехугольника меньше 4d, а сумма углов любого выпуклого n – угольника меньше 2(n-1)d.*

Так как на евклидовой плоскости углы, прилежащие к верхнему основанию четырехугольника Саккери равны прямым углам, что в соответствии с теоремой 12.3 равносильно аксиоме параллельности евклидовой геометрии, то можно сделать следующий вывод.

Утверждение 13.7. *Углы, прилегающие к верхнему основанию четырехугольника Саккери – острые.*

Нам осталось рассмотреть еще два свойства треугольников на плоскости Лобачевского. Первое из них связано с предложением Валлиса: *на плоскости существует хотя бы одна пара треугольников с соответственно равными углами, но не равными сторонами.* В параграфе 11 мы доказали, что это предложение эквивалентно аксиоме параллельности евклидовой геометрии (см. теорему 11.5). Логическое отрицание этого утверждения приводит нас к следующему выводу: на плоскости Лобачевского не существует треугольников с равными углами, но не равными сторонами. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Утверждение 13.8. (четвертый признак равенства треугольников на плоскости Лобачевского).*Любые два треугольника на плоскости Лобачевского, имеющие соответственно равные углы, равны между собой.*

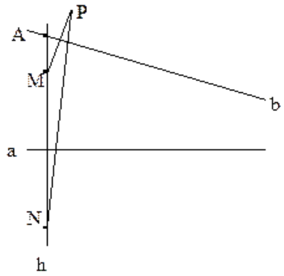

Рис. 52

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Вокруг любого ли треугольника на плоскости Лобачевского можно описать окружность?

Ответ на него дает теорема 9.4. В соответствии с этой теоремой, если вокруг любого треугольника на плоскости можно описать окружность, то на плоскости выполнено условие аксиомы параллельности евклидовой геометрии. Поэтому логическое отрицание утверждения этой теоремы приводит нас к следующему предложению.

Утверждение 13.9. *На плоскости Лобачевского существует треугольник, вокруг которого нельзя описать окружность.*

Легко построить пример такого треугольника. Выберем некоторую прямую a и точку A, которая ей не принадлежит. Опустим из точки A перпендикуляр h на прямую a. В силу аксиомы параллельности Лобачевского существует прямая b, проходящая через A и не перпендикулярная h, которая не пересекает a (рис. 52). Как известно, если вокруг треугольника описана окружность, то ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника. Поэтому нам достаточно привести пример такого треугольника, серединные перпендикуляры которого не пересекаются. Выберем точку M на прямой h, так как показано на рисунке 52. Симметрично отобразим ее относительно прямых a и b, получим точки N и P. Так как прямая b не перпендикулярна h, то точка P не принадлежит h. Поэтому точки M, N и P составляют вершины треугольника. Прямые a и b служат по построению его серединными перпендикулярами. Они же, как было сказано выше, не пересекаются. Треугольник MNP – искомый.

Легко построить пример треугольника плоскости Лобачевского, вокруг которого можно описать окружность. Для этого достаточно взять две пересекающиеся прямые, выбрать точку, которая им не принадлежит, и отразить ее относительно этих прямых. Проведите подробное построение самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля.

1.В плоскости Лобачевского через точку, не лежащую на данной прямой, проходит какое количество прямых не пересекающих данную? ***Ответ****:(В плоскости Лобачевского через точку, не лежащую на данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную.)*

*2.На плоскости Лобачевского существует треугольник, вокруг которого нельзя .....(необходимо закончить фразу).****Ответ****:(На плоскости Лобачевского существует треугольник, вокруг которого нельзя описать окружность.)*

*3.Запишите четвертый признак равенства треугоьников на плоскости Лобачевского**.** **Ответ**:(Любые два треугольника на плоскости Лобачевского, имеющие соответственно равные углы, равны между собой.)*