Лекция №4.
Пучки прямых на плоскости Лобачевского.

Модель Кели-Клейна.

На плоскости Лобачевского различают три типа пучка прямых.

Определение 18.1. *Множество всех прямых плоскости Лобачевского, проходящих через одну точку, будем называть пучком пересекающихся прямых. Множество всех расходящихся прямых, имеющих один и тот же общий перпендикуляр будем называть пучком расходящихся прямых. И множество всех прямых, параллельных между собой в одном и том же направлении, назовем пучком параллельных прямых*.

Точка пересечения прямых, принадлежащих пучку пересекающихся прямых, называется его *центром*. Общий перпендикуляр прямых, принадлежащих пучку расходящихся прямых, носит называние его *базы.*

Нетрудно проверить, что любые две прямые принадлежат одному и только одному из указанных типов пучков. Действительно, если эти прямые пересекаются, то они входят в пучок пересекающихся прямых с центром в точке их пересечения. Если они расходятся, то принадлежат пучку расходящихся прямых, осью которого служит их общий перпендикуляр. Наконец, если данные прямые параллельны, то они с очевидностью принадлежат пучку всех прямых, которые им параллельны в соответствующем направлении.

Мы переходим к доказательству замечательной теоремы о серединных перпендикуляров треугольника на плоскости Лобачевского. Оказывается, что все три серединных перпендикуляра для данного треугольника принадлежат одному из типов пучков. Прежде всего, рассмотрим необходимое нам свойство двупрямоугольников.

Пусть дан двупрямоугольник ABCD, AD – его нижнее, а BC – верхнее основания. Пусть N – середина верхнего основания BC, MN – перпендикуляр, опущенный из точки N на нижнее основание AD (рис. 76).

Лемма 18.2. *Двупрямоугольник ABCD тогда и только тогда является четырехугольником Саккери, когда прямая MN перпендикулярна верхнему основанию BC.*

Доказательство. Необходимость. Пусть прямая MN перпендикулярна основанию BC. Требуется доказать, что ABCD – четырехугольник Саккери. Предположим, что $\angle ABN \neq \angle NCD$. Отразим симметрично отрезок AB относительно прямой MN. Так как N середина основания BC, $MN \perp AD, MN \perp BC$, то точка B преобразуется в точку C, а, в силу нашего

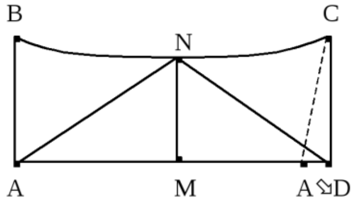

Рис. 76.

предположения, точка A в некоторую точку A прямой AD, не совпадающую с точкой D. Так как при осевой симметрии сохраняются углы между прямыми, то $CA' \perp AD$. Мы получили, что из точки C на прямую AD опущено два перпендикуляра: CD и CA, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника (см. теорему 4.1, § 4). Таким образом, $\angle ABN = \angle NCD$. Мы получили, что в двупрямоугольнике ABCD равны углы при верхнем основании, поэтому он является четырехугольником Саккери (см. теорему 12.5, §12).

Следствие. Двупрямоугольник тогда и только тогда является четырехугольником Саккери, когда прямая, соединяющая середины оснований, перпендикулярна этим основаниям.

Перейдем к доказательству следующей замечательной теоремы.

Теорема 18.3. (Теорема о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника) *Серединные перпендикуляры сторон треугольника на плоскости Лобачевского принадлежат либо пучку пересекающихся, либо пучку расходящихся, либо пучку параллельных прямых, при этом существуют треугольники, серединные перпендикуляры которых принадлежат каждому из трех типов пучков.*

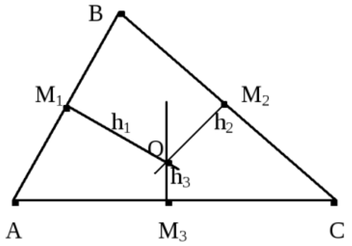

Рис. 77.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник, M_1, M_2 и M_3 – соответственно середины сторон AB, BC и AC, h_1, h_2 и h_3 – серединные перпендикуляры сторон треугольника, восставленные в точках M_1, M_2 и M_3. Рассмотрим три возможные случая.

1. Перпендикуляры h_1 и h_2 пересекаются в точке O (рис. 77). Тогда, используя те же рассуждения, что и в школьном курсе геометрии, легко доказать, что точка O равноудалена от всех вершин треугольника. Отсюда следует, что она принадлежит серединному перпендикуляру h_3 (подробное доказательство

проведите самостоятельно). Мы получили, что серединные перпендикуляры h_1, h_2 и h_3 пересекаются в точке O, т.е. принадлежат пучку пересекающихся прямых.

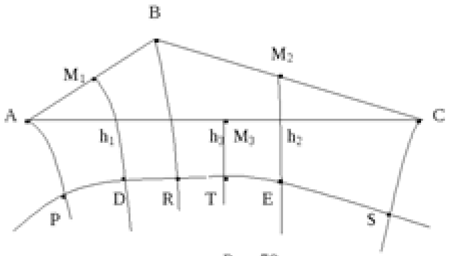

Рис. 78.

2. Перпендикуляры h_1 и h_2 расходятся. Тогда существует общий перпендикуляр DE этих прямых. Опустим из вершин треугольника перпендикуляры AP, BR и CS на прямую DE (рис. 78). Четырехугольник PABR является двупрямоугольником, PR и AB, соответственно, его нижнее и верхнее основания, точка M_1 – середина верхнего основания, h_1 перпендикулярна его основаниям PR и AB. Тогда, в соответствии с леммой 18.2, PABR - четырехугольник Саккери. Поэтому AP = BR. Аналогично доказывается, что RBCS также является четырехугольником Саккери. Отсюда получим, что BR = CS. Поэтому четырехугольник PACS также является четырехугольником Саккери, а прямая h_3, перпендикулярная его верхнему основанию, как следует из леммы 18.2, перпендикулярна прямой

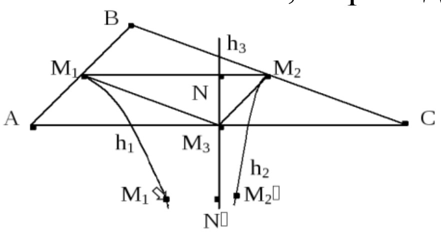

Рис. 79

PS. Таким образом, серединные перпендикуляры h_1, h_2 и h_3 принадлежат пучку расходящихся прямых с базой PS.

3. Перпендикуляры h_1 и h_2 параллельны между собой. Заметим, что перпендикуляр h_3 не пересекается с h_1 или h_2, так как иначе серединные перпендикуляры треугольника ABC. В соответствии с пунктом 1 доказываемой теоремы, должны принадлежать пучку пересекающихся прямых. Без ограничения общности можно предположить, что $AB \leq BC \leq AC$. Тогда в треугольниках AM_1M_3 и CM_1M_3 углы $\angle M_1M_3A$ и $\angle M_2M_3C$ - острые. Отсюда следует, что точки M_1 и M_2, так же, как прямые h_1 и h_2 лежат в различных полуплоскостях относительно прямой h_3. Поэтому отрезок M_1M_2 пересекает прямую h_3 в некоторой точке N. Выберем на прямых h_1 и h_2 точки M_1 и M_2 так, чтобы $\overline{M_1M_1'} \parallel \overline{M_2M_2'}$. Примем без доказательства, что точки M_1 и M_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой M_1M_2. Выберем в той же полуплоскости на прямой h_3 точку N. Легко показать, что $\overline{NN'} \parallel \overline{M_2M_2'}$. Действительно, эти прямые не пересекаются. Рассмотрим произвольный внутренний луч p угла $M_1M_2M_2$. Он пересекает прямую h_1, так

как $\overline{M_1M_1'} \| \overline{M_2M_2'}$. Но прямые h_1 и h_2 лежат в различных полуплоскостях относительно прямой h_3, поэтому он также пересекает и прямую $\overline{NN'}$. Таким образом, прямые h_1, h_2 и h_3 принадлежат пучку параллельных прямых.

Нам осталось показать, что на плоскости Лобачевского существуют треугольники, серединные перпендикуляры которых принадлежат указанным типам пучков. Пусть даны три расходящиеся прямые h_1, h_2 и h_3. Пусть их базой является прямая a. Выберем произвольную точку A плоскости, которая не лежит на прямых h_1, h_2, h_3 и a.

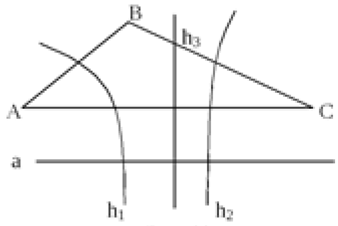

Рис. 80.

Отразим симметрично точку A относительно прямой h_1, получим точку B. Точку B в свою очередь отразим симметрично относительно прямой h_2. Ее образом является точка C (рис. 80). Точки AB и C образуют вершины треугольника. Действительно, если точки A, B и C лежат на одной прямой, то эта прямая отлична от общего перпендикуляра a, так как точка A по построению не принадлежит базе a, с другой стороны прямые h_1 и h_2 ей перпендикулярны. Мы построили две прямые, перпендикулярные h_1 и h_2, что, как уже неоднократно отмечалось, невозможно. Построенный треугольник ABC является искомым, расходящиеся прямые h_1, h_2 и h_3 служат его серединными перпендикулярами.

Для построения примеров треугольников, для которых серединные перпендикуляры принадлежат пучкам параллельных или пересекающихся прямых, следует поступить аналогичным образом. Выбрать три прямые, принадлежащие одному или второму типу пучков, выбрать точку, не лежащую на этих прямых и провести последовательно симметрию относительно выбранных прямых. Подробное доказательство проведите самостоятельно.

Пусть на плоскости Лобачевского дан пучок прямых. *Точку будем называть обыкновенной, если она не совпадает с центром в случае пучка пересекающихся прямых и не принадлежит базе в случае пучка расходящихся прямых. Если нам дан пучок параллельных прямых, то любая точка плоскости будет обыкновенной.* Точки плоскости, совпадающие с центром пучка пересекающихся прямых или принадлежащие базе пучка расходящихся прямых будут называться нами *особыми*.

Пусть на плоскости Лобачевского дан некоторый пучок P. Введем на множестве обыкновенных точек плоскости следующее бинарное отношение. *Две обыкновенные точки A и B находятся в отношении : A B,* *если серединный перпендикуляр отрезка AB является прямой пучка.* Докажем следующую теорему.

Теорема 19.1. *Отношение является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Из определения отношения следует, что оно удовлетворяет свойствам симметричности и транзитивности. Проверим свойство транзитивности. Пусть даны три обыкновенные точки A, B и C, пусть A B, B C. Требуется доказать, что A C. Прежде всего, покажем, что данные точки не лежат на одной прямой. Рассмотрим три случая.

1) Данный пучок P является пучком пересекающихся прямых. Если предположить, что точки A, B, и C лежат на одной прямой, то тогда серединные перпендикуляры отрезков AB и BC перпендикулярны прямой AC. Поэтому они являются расходящимися прямыми и не могут принадлежать пучку пересекающихся прямых. Мы получили противоречие, из которого следует, что точки A, B и C не коллинеарные.

2) P – пучок расходящихся прямых. Еще раз сделаем предположение о коллинеарности точек A, B и C. Отсюда следует, что серединные перпендикуляры отрезков AB и BC перпендикулярны прямой AC. Точки A и C – обыкновенные, поэтому прямая AC не совпадает с базой. Мы получили, что серединные перпендикуляры этих отрезков одновременно перпендикулярны двум прямым, с одной стороны базе, с другой прямой AC. Мы пришли к противоречию. На плоскости Лобачевского не существует двух перпендикуляров к паре прямых.

3) P – пучок параллельных прямых. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC параллельны между собой. Но из предположения о том, что A, B и C принадлежат одной прямой, следует, что эти перпендикуляры являются расходящимися прямыми. Полученное противоречие доказывает неколлинеарность данных точек.

Таким образом, точки A, B и C лежат в вершинах треугольника. Тогда из теоремы 18. 3 о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника на плоскости Лобачевского следует, что серединные перпендикуляры отрезков AB, BC и AC принадлежат одному пучку, т.е. точки A и C находятся в отношении . Теорема доказана.

Так как бинарное отношение является отношение эквивалентности, то множество всех обыкновенных точек плоскости разбивается на классы эквивалентностей.

Определение 19.2. *Класс эквивалентностей на множестве обыкновенных точек относительно отношения называется траекторией пучка.*

В настоящем параграфе мы исследуем геометрические свойства траекторий пучков. Прежде всего, докажем теорему.

Теорема 18.3. *Кривая тогда и только тогда служит траекторией пучка пересекающихся прямых, когда она является окружностью с центром в центре пучка.*

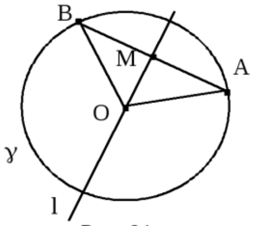

Рис. 81.

Доказательство. Пусть P – пучок пересекающихся прямых с центром в точке O, - его траектория, A некоторая точка . Обозначим через r длину отрезка OA. Выберем произвольную точку B траектории (рис. 81). Так как точки A и B принадлежат одной траектории, следовательно они находятся в отношении , поэтому существует прямая l пучка, относительно которой они симметричны. Отсюда следует, что треугольник OAB – равнобедренный. OA = OB. Длина отрезка OB равна r, точка B принадлежит окружности радиуса r с центром в точке O.

Обратное утверждение очевидно. Если мы рассмотрим окружности с центром в точке O, и рассмотрим пучок пересекающихся прямых с центром в точке O, то легко показать, что ее любые две точки симметричны относительно прямой, проходящей через центр пучка. Доказательство проведите самостоятельно.

Определение 19.3. *Множество точек, принадлежащих полуплоскости плоскости Лобачевского и отстоящих от ее границы на одно и то же расстояние, называется эквидистантой.*

В следующей теореме мы покажем, что эквидистанты являются траекториями пучков расходящихся прямых.

Теорема 19.4. *Траектория пучка расходящихся прямых является эквидистантой и наоборот, любая эквидистанта служит траекторией некоторого пучка расходящихся прямых.*

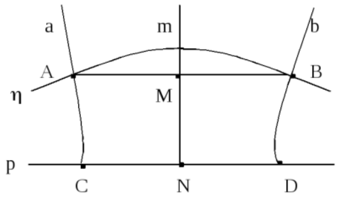

Рис. 82.

Доказательство. Пусть P – пучок расходящихся прямых, p – его база. Рассмотрим обыкновенную точку A плоскости, обозначим через траекторию пучка P, проходящую через A. Все точки траектории находятся в отношении с точкой A. Возьмем произвольную точку B, принадлежащую . Тогда A и B симметричны относительно прямой m пучка P, $m \perp p$. Обозначим через a и b прямые пучка, содержащие точки A и B, пусть C и D точки пересечения прямых a и b с базой p (рис. 82). Покажем, что AC = AD. Так как $a \perp p, b \perp p$, то четырехугольник CABD – двупрямоугольник. Так как A и B симметричны относительно прямой m, то $m \perp AB$. Кроме того, m прямая пучка, поэтому и $m \perp p$. В соответствии с леммой 18.2 (см. § 18), двупрямоугольник ABCD является четырехугольником Саккери. Отсюда следует, что AC = BD, все точки траектории равноудалены от базы p, - эквидистанта.

Обратно. Рассмотрим некоторую эквидистанту , все точки которой равноудалены от прямой p. Выберем две точки A и B на . Опустим из них перпендикуляры a = AC и b = = BD на p, CA = DB (см. рис. 82). Тогда четырехугольник CABD является четырехугольником Саккери. Пусть M – середина отрезка AB, а N – отрезка CD. Из следствия к лемме 18.2 вытекает, что $MN \perp p$. Таким образом, точки A и B находятся в отношении относительно пучка расходящихся прямых с базой p. Теорема доказана.

Введем следующее определение.

Определение 19.5. *Траектория пучка параллельных прямых называется орициклом.*

Таким образом, траектории состоят из *обыкновенных точек* плоскости. Они могут быть либо окружностями, для пучков пересекающихся прямых, либо эквидистантами, для пучков расходящихся прямых, либо орициклами в случае пучков параллельных прямых. Если для пучка P кривая является траекторией, то любую прямую пучка будем называть *осью* этой траектории.

Эквидистанта и орицикл обладают многими свойствами, совпадающими с соответствующими, известными нам из школьного курса геометрии свойствами окружности. В евклидовой геометрии некоторые свойства окружности нельзя доказать, не используя аксиому параллельности евклидовой плоскости, например, теорему об измерении угла, вписанного в окружность. Ясно, что эти свойства не имеют места в геометрии Лобачевского. Но ряд свойств окружности доказывается с помощью утверждений абсолютной геометрии. Поэтому они справедливы в геометрии Лобачевского. Отметим их.

1) Окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр.

2) Серединный перпендикуляр к хорде окружности проходит через ее центр.

3) Прямые, проходящие через центр окружности, образуют равные углы с прямой, соединяющей их точки пересечения с окружностью.

4) Прямая линия пересекает окружность не более чем в двух точках.

5) Касательная к окружности перпендикулярна прямой, проходящей через центр и точку касания.

Докажем аналогичные свойства для траекторий пучков на плоскости Лобачевского.

параллельности равных отрезков AM и MB (см рис. 83). Поэтому $\angle MAA_2 = \angle MBB_2$. Свойство доказано полностью.

Пусть даны пучок P и его траектория . Рассмотрим произвольную прямую m плоскости, которая в случае пучка расходящихся прямых не совпадает с его базой.

Свойство 19.10. *Прямая т имеет с траекторией пучка не более двух общих точек.*

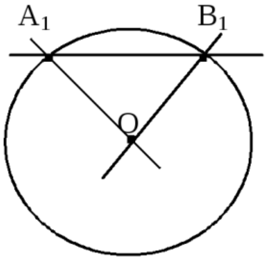

Рис. 85.

Доказательство. Предположим, что прямая m, пересекающая ее в трех точках A, B и C, $a = \overline{A_1A_2}$, $b = \overline{B_1B_2}$ и $c = \overline{C_1C_2}$ –оси пучка в этих точках
В силу предыдущего свойства 19.9 $\angle BAA_2 = \angle ABB_2$, $\angle CAA_2 = \angle ACC_2$ и $\angle BCC_2 = \angle CBB_2$. Отсюда следует, что $\angle CBB_2 = \angle ABB_2$. Так как эти углы смежные, то $\angle CBB_2 = \angle ABB_2 = d$. Поэтому $\angle BAA_2 = \angle ABB_2 = \angle CBB_2 = \angle BCC_2 = d$
Пусть дан пучок пересекающихся прямых. Тогда траектория представляет собой окружность с центром в точке пересечения прямых пучка (рис. 85). Тогда $\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = d$. Мы пришли к противоречию, так как в треугольнике OA_1B_1 два угла прямые.
2 Точнее нужно говорить не о вращении плоскости, а об ограничении этого вращения на множество . В дальнейшем, если не будет возникать путаницы, мы не будем делать этих уточнений.
3 Определение флага см. в § 4. Под точкой, лучом и полуплоскостью в данном случае имеется в виду -точка, -луч и -полуплоскость.
4 В настоящем параграфе термины «конгруэнтные» и «равные» применим только к фигурам, принадлежащим -плоскости. Конгруэнтность фигур в евклидовом смысле в этом параграфе в дальнейшем не встречается.
5 Единственности точки B’ аксиома не требует, но ею удобно пользоваться при проверке последующих аксиом.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите теорему о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. ***Ответ****:*

(Серединные перпендикуляры сторон треугольника на плоскости Лобачевского принадлежат либо пучку пересекающихся, либо пучку расходящихся, либо пучку параллельных прямых, при этом существуют треугольники, серединные перпендикуляры которых принадлежат каждому из трех типов пучков.

2. *Какой ряд свойств окружности доказывается с помощью утверждений абсолютной геометрии Лобачевского?* ***Ответ:*** ***(****Прямая m имеет с траекторией пучка не более двух общих точек.)*

3. Какой четырехугольник называется четырехугольником Саккери? ***Ответ****:(****.*** *Двупрямоугольник ABCD тогда и только тогда является четырехугольником Саккери, когда прямая MN перпендикулярна верхнему основанию BC.*

Доказательство. *Пусть прямая MN перпендикулярна основанию BC. Требуется доказать, что ABCD – четырехугольник Саккери. Предположим, что* $\angle ABN \neq \angle NCD$. *Отразим симметрично отрезок AB относительно прямой MN. Так как N середина основания BC,* $MN \perp AD, MN \perp BC$, *то точка B преобразуется в точку C, а, в силу нашего предположения, точка A в*

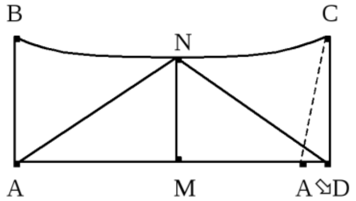

Рис. 76.

некоторую точку A прямой AD, не совпадающую с точкой D. Так как при осевой симметрии сохраняются углы между прямыми, то $CA' \perp AD$. *Мы получили, что из точки C на прямую AD опущено два перпендикуляра: CD и CA, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника (см. теорему 4.1, § 4). Таким образом,* $\angle ABN = \angle NCD$. *Мы получили, что в двупрямоугольнике ABCD равны углы при верхнем основании, поэтому он является четырехугольником Саккери*