Лекция №6.
Неевклидова геометрия простыми словами.

Слово геометрия в переводе означает землемерие. Т.е., эту науку придумали для того, чтобы мерить землю. А поскольку потребность изначально была в измерении площади земли (объём не требовался), то и основным направлением развития геометрии сначала была планиметрия. Т.е., изучение двухмерных фигур на плоскости.

Так же, плоскость изучать на порядок проще, чем объём, и потому, заложив в основу геометрии планиметрию (а последнюю изучая под стимулом землемерия), геометры за понятием поверхности земли подразумевали, видимо, конкретную плоскость.

Стимулом подразумевать за поверхностью Земли плоскость было так же то, что версия о плоской Земле была самой ходовой в древности (версия о горбушке и о шаре уныло делили вторые и третьи места). В силу всего этого геометрия как бы получалась наукой об измерении плоской Земли (для кого в буквальном понимании такой сути дела, для кого нет, но другого слова за этой наукой так и не закрепили). Единственная только проблема оказалась в том, что земля была на самом деле не плоская, и для землемерия планиметрия оказалась как раз и непригодной: площадь поля можно относительно адекватно измерить, а вот площадь континента – нет.

Впрочем, никаких казусов с приспособлением имеющихся знаний к последующим открытиям в этой области в своё время не случилось, ведь Земля не первая шарообразная форма, с которой людям приходилось иметь дело. И ещё с древности имела место и развивалась, не конфликтуя с классической планиметрией, сферическая геометрия (раздел геометрии, изучающий положения для фигур и линий на поверхности сферы). Но вот если бы древние землемеры столкнулись с необходимостью измерять площади поверхности континентов раньше, чем узнали бы о форме Земли и освоили бы сферическую геометрию, то столкнулись бы, наверное, с весьма сильным для себя казусом: площадь поверхности замеряемого участка не соответствует расчётам. Сумма углов треугольника не равна развёрнутому углу, длина пути из точки А в точку Б на практике не соответствует теории, и т.д. И тогда, возможно, перепроверяли бы расчёты, удивлялись, снова перепроверяли, чесали затылок, и только после этого думали, почему же так получается.

Как развивалась геометрия? Как и всё – от простого к сложному. Т.е., сначала, наверное, были найдены формулы подсчёта площади двухмерных фигур на плоскости. Потом на их основе формулы подсчёта объёма трёхмерных фигур. А потом (ну или параллельно этому) формулы подсчёта площадей поверхности этих фигур. Возможно, какие-то простые объёмы научились считать раньше, чем сложные площади, но всё равно, вряд ли раньше простых площадей. Поэтому путь всегда шёл от более лёгкого к более трудному, и на этом пути ни у кого не вызывало удивления, что на площади поверхности шара действуют другие правила, чем на плоскости, т.к. воочию видели различие между плоскостью и поверхностью объёма.

Удивление застало человеческие умы позже, когда они освоили оптику, и вооружённые телескопами взгляды вырвались в звёздное пространство, в котором оказалось, что классические формулы подсчёта расстояний и объёмов неприменимы для его измерения. Весь объём пространства оказался замкнутым сам в себе аналогично тому, как замыкается площадь поверхности шара, а составляющее его пространство оказалось сплошь неровным и вытягивающимся вблизи гравитационных объектов куда-то «вглубь» самого себя. Более того, Эйнштейн перевернул привычное представление о природе вещей, заключавшееся в том, что время и пространство – это сцена, на которой происходят все остальные события, и на смену ему поставил новое, заключающееся в том, что они сами всего лишь такие же события среди всех остальных, а что такое сама сцена, оставил додумывать юным падаванам. Ещё у него там в его цэ-равно-эм-си-квадрат завязано время и скорость света, но мы не будем усложнять, и сфокусируемся на осмыслении хотя бы пространства.

Все искажения в пространстве начитанные люди обычно называют словами «неевклидова геометрия», под которой подразумевается, что там всё неожиданно совсем не так, как мы привыкли представлять и считать. И в рамках этой «неевклидовой геометрии» пространство искажается и замыкается в себе весьма трудно представимым образом, и все расчёты его, сделанные из привычных и понятных формул, не будут соответствовать действительности.

«Неевклидова геометрия» подразумевает противопоставление «евклидовой», выступающей в данном случае в роли «классического пространства», выражающего то самое «привычное и понятное» представление о природе вещей. Но только вот какая незадача: «евклидова геометрия» на земле, и неевклидова там же – к неевклидовой геометрии относится сферическая, а это всего лишь изучение положений на площади поверхности сферы.

Ещё туда же относятся геометрии Римана и Лобачевского, изучающих положения на поверхности элипсоида и тора, а это всё фигуры в пределах всё того же привычного нам трёхмерного пространства. И чтобы найти расхождения с евклидовой геометрией, не нужно лететь ни в какой космос; достаточно просто рисовать прямые на этих фигурах.

Согласно Евклиду, через точку, лежащую не на прямой, можно провести только одну прямую, параллельную оной. Согласно Лобачевскому, через эту точку можно провести ещё одну. Всё просто: если на ровной плоскости начерчена линия, и где-то сбоку от неё есть точка, то если через эту точку начать вести другую прямую, то параллельно первой вторая прямая возможно только одна. Но если на поверхности тора мы имеем прямую и где-то рядом с ней точку, то, начав вести через эту точку другую прямую, параллельную первой, мы из одного места получим одну прямую, а из другого – другую. И всё это наглядно изобразимо в пределах всё того же трёхмерного пространства, в котором нам полностью понятны и плоскость, и сфера, и тор, и формулы нахождения их объёмов и поверхностей имеются. Так что же тогда такое неевклидова геометрия, какое к ней отношение имеет искажение космического пространства, и почему оно в своё время оказалось таким сюрпризом для всех, и до сих пор продолжает таковым для каждого нового подавана, изучающего премудрости многоликой геометрии?

Дело в том, что есть законы природы, а есть правила, придуманные людьми. Например, то, что два плюс три пять – это законы природы. А вот то, что три плюс два, помножить на два, семь – это правила, придуманные людьми. Просто люди так придумали, что сначала мы должны помножать, а потом складывать, и в результате мы сначала получаем четыре, а потом прибавляем три (а если бы этого правила не было, то сначала получили бы пять, а потом помножили бы на два и получили десять). Придумали для своего удобства, чтобы убрать разногласия в решении примеров, потому что от перестановки мест слагаемых сумма не меняется только там, где нет умножения и деления. Вот и придумали люди правило, чтобы всегда получалось одинаково на случай, если последовательность выполнения операций синхронизировать не получится. Но в природе такого правила нет. И нет никакого числа семь в решении такого примера. И если применять придуманное правило там, где природа делает своё дело без него, то можно получать ответ, которого в реальности просто не существует.

Вот и Евклид со своими предшественниками (и последователями) придумали правило, что сначала мы изучаем планиметрию, а потом стереометрию (трёхмерку). И получилось, что сначала мы закладываем положения для закономерности на ровной плоскости, а затем на базе этого мы строим закономерности положения в объёме. И в рамках этих правил получили такие аксиомы, которые расходятся с другими аксиомами, применимыми для искажённых и замкнутых плоскостей. А если бы правила придумали такие, что сначала объём, а потом плоскость, то и таких проблем бы не было. Хотя другие всё равно были бы. Потому, что ограниченное земное сознание имеет тенденцию исходить из того, что плоскость может искажаться в пределах объёма, а объём нет. Ведь трудно же толком представить четвёртое измерение, и не получается без этого понять (и предположить), куда изгибаться третьей координате. И когда заложили такое правило, и начали плясать от него (а по умолчанию оно выставлено у всех обывателей), то и получается непонятка при обнаружении того, что трёхмерное пространство тоже может ещё куда-то искажаться.

В природе этих правил нет. И нет никакой «неевклидовой» и «евклидовой» геометрии. В природе есть иерархия возможностей и зависимостей. В природе есть смысл понятия бесконечной прямой линии – это одномерное пространство. Есть смысл понятия бесконечной плоскости – это двухмерное пространство. Есть смысл бесконечного объёма – это трёхмерное. Ещё есть смысл понятия бесконечного четырёхмерного, пятимерного и сколько-угодно-мерного. И никакое из них во главе всех остальных не стоит. И линию можно замкнуть в окружность – это смысл понятия замкнутого одномерного пространства. Плоскость можно замкнуть в площадь поверхности шара – это смысл замкнутого двухмерного пространства. Трёхмерный объём можно замкнуть в поверхность четырёхмерного тела, и это будет замкнутое трёхмерное пространство. Ещё можно четырёхмерное замыкать в пятимерном, и т.д., и каждое понятие имеет свой смысл.

Есть смысл понимания, что линия, замкнутая в окружность – всегда та же самая окружность одними и теми же закономерностями, в какую сторону её не замыкай. А вот плоскость можно свернуть и в трубочку, и в сферу – это разные пространства с разными закономерностями. И есть смысл понимания, что в искажениях трёхмерного пространства в пределах четырёхмерного вариантов логично иметь ещё на порядок больше – всё это надо учесть в допущении возможных искажений. Так же есть смысл понятия искажённой линии на ровной плоскости и на искажённой, и плоскости в ровном и в искажённом трёхмерном пространстве. И есть смысл понятия о порядке, в котором каждое пространство может искажаться в пределах следующего.

Если какое-то четырёхмерное пространство исказится в пределах пятимерного, то все его дочерние трёхмерные сферы и торы с нарисованными на них прямыми тоже исказятся соответствующим образом. И если исказятся какие-то многомерные пространства, на которых окажется построенным наше трёхмерное, то все наши ровные для нас плоскости могут перестать работать с теми же закономерностями, с которыми мы привыкли иметь дело в своей планиметрии. И мы можем даже не понять, с искажением какого порядка мы имеем дело, но будем просто получать несовпадающий с расчётом результат, и перепроверять его с необъяснимой безуспешностью. В общем, пространств для построения всяких «неевклидовых» геометрий много, для желающих в них копаться хватит до бесконечности.

Тем не менее, если мы имеем формулы подсчёта площади окружности и сферы, то должны быть формулы подсчёта и следующих за ними фигур в многомерных пространствах. Если есть формулы подсчёта поверхностей сферы и тора (и других искажённых плоскостей), то должны быть формулы и подсчёта пространств в более сложных многомерных искажениях. И т.о. (теоретически), о каких бы «неподдающимся разумному пониманию» искажениях речь не шла бы, в их отношении всё равно должны быть формулы, по которым их можно было бы высчитать. Нужно только эти формулы найти.

Как мы считаем площадь прямоугольника – помножаем длину на ширину. А треугольника? Половину от этого произведения. А очень сложного и неправильного многоугольника? Разбиваем на треугольники, и считаем отдельно, а потом складываем. А площадь фигуры, очерченной произвольной извивающейся кривой? Разбиваем на треугольники (или сектора) до тех пор, пока погрешность не окажется в пределах допустимой, и в таком режиме считаем. И стало быть (теоретически), продукты любых искажений можно высчитать при помощи формул или с точными значениями, или в пределах допустимых погрешностей. Поэтому я не делю геометрию на «евклидову», как понятную, и «неевклидову», как непонятную и необъяснимую. А только всего лишь на изученную и не изученную.

И во всём этом многообразии большая ограниченность всегда получается зависимой от меньшей. Т.е., сначала идёт более многомерное пространство, а затем менее многомерное. Из чего следует, что земная логика обратно перевёрнута реальному положению вещей в природе: то, что она считает первичным (точка-линия-плоскость…), на самом деле оказывается производным и зависимым от всего, а что она считает вторичным и далёким (или не существующим), и есть изначальное и исходное. Так может, именно поэтому и не получается у земного сознания найти ответ на вопрос, откуда взялся этот мир, и почему он существует таким, какой есть?

Теперь мы знаем, почему оказывается так сложно познавать этот мир – он устроен иначе, чем кажется изначально. Средствами системы нельзя доказать полноту системы. А геометрия – наука не поверхностная, и копать надо глубже.

Когда-то Лобачевский думал,

Кутаясь в пальто,
Как мир прямолинеен,
Видно, что-то здесь не то.
Но он вгляделся пристальней
В безоблачную высь,
А там все параллельные его пересеклись.

Николай Иванович Лобачевский является примером яркого математического дарования. Это дарование было обнаружено его учителями. Как часто бывает, сам Лобачевский и не подозревал о своём могучем таланте математика. Будучи студентом первого курса Казанского университета, он изучал медицину.

Деятельность Лобачевского неразрывно связана с историей Казанского университета, который был открыт в 1805 году. В 1827 году Николай Иванович становится ректором Казанского университета, находился он в этой должности непрерывно в течение 19 лет.

Казанский университет

Деятельность Лобачевского вызывает изумление. Наряду с большой административной и педагогической работой он, не покладая рук, занимался и наукой. Лобачевскому было всего 34 года, когда он решил «многовековую» проблему **V** постулата из «Начал» Евклида и построил свою, неевклидову геометрию.

Имя Лобачевского известно всему миру. Он вошёл в историю математики как революционер в науке и «Коперник геометрии». Николай Лобачевский решил проблему, над которой человечество бесплодно билось более двух тысяч лет. Анализируя попытки доказать **V** постулат, Лобачевский сделал чрезвычайно смелый вывод о его недоказуемости. Раз **V** постулат недоказуем как теорема, то принципиально возможна другая геометрия, отличная от евклидовой,- неевклидова геометрия, отправной точкой которой является отрицание **V** постулата.

«Геометрия Лобачевского», как её теперь называют, является крупнейшим завоеванием науки и составляет целую эпоху в развитии математики и смежных ей наук.

Лобачевский, получив в геометрии необычные результаты, натолкнулся на косность и рутину. Ученого высмеяли как человека, сумасбродного в науке, который написал сатиру на геометрию, пытаясь доказать, что белое - это чёрное, круглое – четырёхугольное, что сумма всех углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых и ряд других нелепостей.
Приходится удивляться мужеству Лобачевского, который без моральной поддержки со стороны, окружённый непроницаемой стеной равнодушия, не пал духом и пронес свои убеждения через всю многотрудную жизнь.
Лобачевский остался верен науке даже тогда, когда на него обрушилось сразу несколько невзгод (смерть старшего сына, ухудшение материального положения, насильственное отстранение от университета). За год до смерти, будучи совершенно слепым, Лобачевский диктует своим ученикам новое сочинение, названное им «Пангеометрией», где показывает, что евклидова геометрия есть частный случай неевклидовой геометрии. Эту последнюю свою работу он с любовью посвящает Казанскому университету, где прошла вся его творческая жизнь.
24 февраля 1856 года Лобачевского не стало. Какого-нибудь десятка лет не дожил он до всеобщего признания своих трудов.
Развитию и распространению идей Лобачевского содействовали своими трудами такие замечательные учёные, как


Бернхард Риман


Анри Пуанкаре


Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц


Карл Гаусс

Что касается Карла Гаусса, то он также вошёл в историю создания неевклидовой геометрии Лобачевского как один из её пионеров, который вполне сознательно развивал её, но, к сожалению, не напечатал по этому поводу ни единой строчки. В письмах к своим друзьям скупой на похвалы Гаусс высоко оценивал открытие Лобачевского. Однако боязнь быть не понятым и осмеянным со стороны невежественных людей помешала Гауссу обработать свои идеи по неевклидовой геометрии и опубликовать их.
Итак, Лобачевский боролся против темноты и невежества, за организацию народного образования и просвещения в стране. Учёный требовал от каждого молодого человека, чтобы он был гражданином, «который высокими познаниями своими составляет честь и славу своего отечества». Рассматривая историческое прошлое и настоящее своего отечества,

Лобачевский верил в его светлое будущее и поучал университетскую молодёжь, что «счастливейшие дни России ещё впереди».

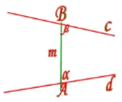
Профессор В.Ф.Коган говорил: "Я беру на себя смелость утверждать, что было легче остановить солнце, что легче было двинуть землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение!"

Доказательство V постулата.

История создания геометрии Лобачевского одновременно является историей попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат представляет собой одну из аксиом, положенных Евклидом в основу изложения геометрии. Пятый постулат – последнее и самое сложное из предложений, включённых Евклидом в его аксиоматику геометрии. Напомним формулировку пятого постулата: если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от неё сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются.

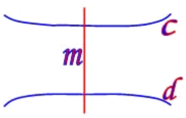
Например, если на рисунке 1 угол α - прямой, а угол β чуть меньше прямого, то прямые c и d пересекаются, причём справа от прямой m. Многие теоремы Евклида (например, « в равнобедренном треугольнике углы при основании равны ») выражают гораздо более простые факты, чем пятый постулат. К тому же проверить на эксперименте пятый постулат довольно сложно. Достаточно сказать, что если на рисунке 1 расстояние |AB| считать равным 1 м, а угол b отличается от прямого угла на одну угловую секунду, то можно подсчитать, что прямые c и d пересекаются на расстоянии свыше 200 км от прямой m.

рисунок 1



Многие математики, жившие после Евклида, пытались доказать, что эта аксиома (пятый постулат) – лишняя, т.е. эта аксиома может быть доказана, как теорема на основании остальных аксиом. Так в V веке математик Прокл (первый комментатор трудов Евклида) предпринял такую попытку. Однако в своём доказательстве Прокл незаметно для себя использовал следующее утверждение: два перпендикуляра к одной прямой на всём своём протяжение находятся на ограниченном расстоянии друг от друга (т.е. две прямые, перпендикулярные третьей, не могут неограниченно удаляться друг от друга, как линии на рисунке 2).

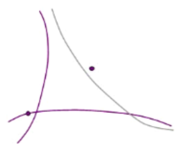
рисунок 2



Но при всей кажущейся наглядной «очевидности» это утверждение при строгом аксиоматическом изложении геометрии требует обоснования. В действительности использованное Проклом утверждение является эквивалентом пятого постулата; иначе говоря, если его добавить к остальным аксиомам Евклида в качестве ещё одной аксиомы, то пятый постулат можно доказать (что и сделал Прокл), а если принять пятый постулат, то можно доказать сформулированное Проклом утверждение. Критический анализ дальнейших попыток доказать пятый постулат выявил большое число аналогичных «очевидных» утверждений, которыми можно заменить пятый постулат в аксиоматике Евклида. Вот несколько примеров таких эквивалентов пятого постулата:

1) Через точку внутри угла, меньшего, чем развёрнутый можно провести прямую, пересекающую его стороны, т.е. прямые линии на плоскости не могут располагаться так, как показано на рисунке 3.

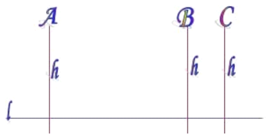
рисунок 3



2) Существуют два подобных треугольника, не равных между собой.

3) Три точки, расположенные по одну сторону от прямой 1 на равном расстоянии от неё (рисунок 4), лежат на одной прямой.

рисунок 4



Вопросы для самоконтроля.

1.Как развивалась геометрия? ***Ответ****:(Как развивалась геометрия? Как и всё – от простого к сложному. Т.е., сначала, наверное, были найдены формулы подсчёта площади двухмерных фигур на плоскости. Потом на их основе формулы подсчёта объёма трёхмерных фигур. А потом (ну или параллельно этому) формулы подсчёта площадей поверхности этих фигур. Возможно, какие-то простые объёмы научились считать раньше, чем сложные площади, но всё равно, вряд ли раньше простых площадей. Поэтому путь всегда шёл от более лёгкого к более трудному, и на этом пути ни у кого не вызывало удивления, что на площади поверхности шара действуют другие правила, чем на плоскости, т.к. воочию видели различие между плоскостью и поверхностью объёма.*

Удивление застало человеческие умы позже, когда они освоили оптику, и вооружённые телескопами взгляды вырвались в звёздное пространство, в котором оказалось, что классические формулы подсчёта расстояний и *объёмов неприменимы для его измерения. Весь объём пространства оказался замкнутым сам в себе аналогично тому, как замыкается площадь поверхности шара, а составляющее его пространство оказалось сплошь неровным и вытягивающимся вблизи гравитационных объектов куда-то «вглубь» самого себя. Более того, Эйнштейн перевернул привычное представление о природе вещей, заключавшееся в том, что время и пространство – это сцена, на которой происходят все остальные события, и на смену ему поставил новое, заключающееся в том, что они сами всего лишь такие же события среди всех остальных, а что такое сама сцена, оставил додумывать юным падаванам. Ещё у него там в его цэ-равно-эм-си-квадрат завязано время и скорость света, но мы не будем усложнять, и сфокусируемся на осмыслении хотя бы пространства.)*

2.Доказать пятый постулат Евклида.
Ответ:(смотрите в лекции).
3.В чем заключалась основная суть "неевклидовой геометрии"?
Ответ: (развернутый ответ в лекции).